Tentamen Sterren & Planeten
(21.10.2009, 13:00 – 16:00)

Als je de *formulering* van een vraag niet helemaal begrijpt, zie dan de volgende pagina's voor de originele Engelstalige versie van het tentamen.

1. De aarde is omgeven door een netwerk van geostationaire satellieten (kunstmanen) die onder meer voor communicatie en televisie worden gebruikt (in een geostationaire baan duurt een omloop 24 uur).

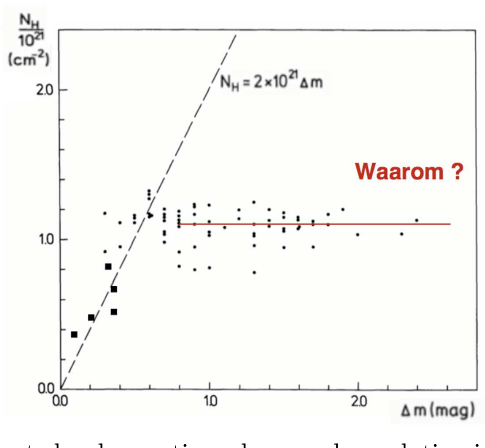
   (a) Bereken de snelheid (in km/h) en afstand (in km) vanaf het centrum van de aarde voor een geostationaire kunstmaan.

   (b) Leg in je eigen woorden uit wat er zou veranderen voor de kunstmaan, als de dichtheid van de aarde twee keer zo klein zou zijn als nu (massa blijft hetzelfde).

   (c) Bereken de verhouding tussen de getijdenwerkingen (verandering in versnelling Δa) op de kunstmaan veroorzaakt door de aarde en de zon (verhouding van Δa's). Leid eerst een formule af voor Δa.

2. De 21 cm lijn van neutraal waterstof correspondeert met de spin overgang van het elektron in het atoom. Het energieverschil tussen de twee toestanden is extreem klein, en de statistische gewichten van het bovenste en het onderste niveau zijn 3 en 1, respectievelijk. De absorptie doorsnede voor de 21 cm lijn bij 100 K is 1.4×10^{-21} cm^2/H-atoom.

   (a) Bereken de optische diepte van het licht van de 21 cm lijn van een typische warme interstellaire wolk (T = 100 K) met een grootte van 10 pc en een dichtheid van 50 H-atomen cm^{-3}. Met welke factor zou de intensiteit van de straling worden afgezwakt als deze door de wolk heen gaat?



   (b) De afbeelding hierboven laat de observationeel gevonden relatie zien tussen de kolom dichtheid $N_{\rm H}$ van atomair waterstof en extinctie Δm. Leg in je eigen woorden uit wat we van deze grafiek leren en waarom $N_{\rm H}$ afvlakt bij hoge extinctie.

(c) Beschouw alleen de twee energieniveaus van waterstof die de 21 cm lijn veroorzaken. Bereken de verhouding van de bezettingen van deze niveaus voor de bovengenoemde wolk ($n_{\rm H} = 50$ cm^{-3}, $T = 100$ K).

3. Sterren brengen het grootste deel van hun leven door op de hoofdreeks, waar ze waterstof omzetten in helium.

   (a) Maak een schatting voor de levensduur die een ster van één zonsmassa zou hebben, als hij energie zou produceren door waterstof met een constante snelheid te fuseren (4 protonen $\rightarrow$ ^{4}He). Neem aan dat de ster initieel alleen uit waterstof bestaat.

   (b) Beschrijf in je eigen woorden hoe de zwaardere elementen op een andere manier binnen in sterren kunnen worden gecreëerd dan met nucleaire fusie.

   (c) Maak een schatting hoe lang de zon zichzelf van energie kan voorzien met behulp van potentiele energie als de nucleaire fusie in het centrum zou stoppen.

4. Sterren stralen zoals een zwart lichaam en wij kunnen hun temperatuur en chemische samenstelling afleiden van hun spectra. Bij het analyseren van het licht van sterren zijn afstanden essentieel om hun schijnbare helderheid te begrijpen.

   (a) Licht in je eigen woorden drie verschillende technieken toe die in de sterrenkunde gebruikt worden om afstanden te berekenen en geef daarbij ongeveer aan tot welke afstand elke techniek geschikt is.

   (b) Bereken hoeveel gloeilampen van 100 W van energie voorzien kunnen worden door een zonnepaneel op de aarde van 10 m^2 dat zichtbare straling van de zon absorbeert. Neem aan dat de efficientie van het zonnepaneel 10% is, dat 50% van de totale energie van de zon wordt uitgezonden in zichtbaar licht, en verwaarloos effecten van de atmosfeer van de aarde.

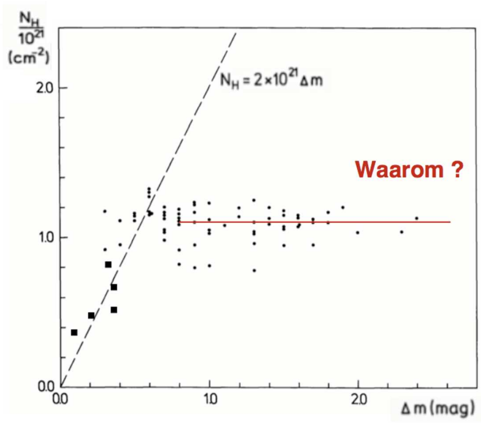
   (c) Leid een relatie af tussen de flux van een zwart lichaam per golflengte interval en per frequentie interval, $I(\lambda, T)$ and $I(\nu, T)$.

Exam Sterren & Planeten
(21.10.2009, 13:00 – 16:00)

If you don't understand the *formulation* of a question completely, please see the previous pages for the translated Dutch version of the exam.

1. The Earth is surrounded by a network of geosynchronous satellites amongst others for communication and broadcasting purposes (a geosynchronous orbit is one that takes 24 hours).
   (a) Calculate the velocity (in km/h) and distance (in km) from the Earth's center for a geostationary satellite.
   (b) Explain in your own words what would change for the satellite, when the density of the Earth would be twice as low as it is now (mass remains unchanged).
   (c) Compare the strength of the tidal effect (change in acceleration Δa) exerted on the satellite by the Earth and the Sun (ratio between Δa's). Derive first a formula for Δa.

2. The 21 cm line of neutral hydrogen corresponds to a spin transition of the electron in the atom. The energy difference between the two states is extremely small, and the statistical weights of the upper and lower level are 3 and 1 respectively. The absorption cross section for the 21 cm line at 100 K is 1.4×10^{-21} cm^2/H-atom.
   (a) Calculate the optical depth of the light of the 21 cm line of a typical warm interstellar cloud ($T = 100$ K) with a size of 10 pc and a density of 50 hydrogen atoms cm^{-3}. By which factor will the background intensity of the light be surpressed when it travels through the cloud?



   (b) The figure above shows the observationally found relation between the column density N_{H} of atomic hydrogen and extinction Δm. Explain in your own words what we learn from this plot and why N_{H} levels off at high extinction.
   (c) Consider only the two energy levels of hydrogen involved in the 21 cm line. Calculate the ratio of their level populations for the above mentioned cloud ($n_{\mathrm{H}} = 50$ cm^{-3}, $T = 100$ K).

3. Stars spend most of their lifetime on the main sequence burning hydrogen to helium.

    (a) Estimate the lifetime that a star of one solar mass will have if it produces energy at a constant hydrogen fusion rate (4 protons $\rightarrow$ ^{4}He). Assume that the star initially consists entirely of hydrogen.

    (b) Describe in your own words how the heavier elements can be created inside stars apart from creating them through nuclear fusion.

    (c) Estimate the time that the Sun can be powered by its gravitational potential when the nuclear energy generation in its center would stop.

4. Stars radiate as black bodies and their spectra allow us to deduce their temperature and chemical composition. When analyzing the light of stars, distances play an essential role in understanding their apparent brightness.

    (a) Describe in your own words three different techniques used in astronomy to measure distances and roughly indicate out to which distances they work.

    (b) Calculate how many 100 W lightbulbs could be powered by a solar panel on Earth with 10 m^2 size that absorbs visual radiation from the Sun. Assume a 10% efficiency of the solar panel, that 50% of the total energy of the Sun is emitted in the visual wavelength range, and neglect the effects of the Earth's atmosphere.

    (c) Derive a relation between the flux of a black body emitted per wavelength interval and per frequency interval, $I(\lambda, T)$ and $I(\nu, T)$.

Radiation from a black body of temperature T at the wavelength λ or frequency ν:

$$I(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/(\lambda kT)}-1} \text{ erg cm}^{-2}\text{ s}^{-1}\text{ cm}^{-1} \tag{1}$$

$$I(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/(kT)}-1} \text{ erg cm}^{-2}\text{ s}^{-1}\text{ Hz}^{-1} \tag{2}$$

Relation between wavelength shift $\Delta\lambda$, rest wavelength λ_0 and radial velocity v_r

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v_r}{c} \qquad (v_r \ll c) \tag{3}$$

Wien's displacement law:

$$\lambda_{\max} T = 0.29 \text{ cm K} \tag{4}$$

Luminosity of a star with radius R

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \tag{5}$$

Relation between optical depth τ, volume density n, length l and absorption coefficient σ

$$\tau_\lambda = nl\sigma_\lambda \tag{6}$$

Radiative transfer for pure absorption

$$I = I_0 e^{-\tau} \tag{7}$$

Boltzmann formula for a gas of temperature T

$$\frac{n_j}{n_i} = \frac{g_j}{g_i} e^{-(E_j - E_i)/(kT)} \tag{8}$$

Saha equation for a gas with kinetic temperature T (assuming most of each species is in the ground electronic state)

$$\frac{n_e n(X_{r+1})}{n(X_r)} = \frac{2g_{r+1}}{g_r}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2} e^{-E_{\text{ion}}/(kT)} \tag{9}$$

Ideal gas law relating pressure P, particle density n and temperature T

$$P = nkT \tag{10}$$

Mean velocity of particles with a mass m in a gas of temperature T

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \tag{11}$$

De Broglie wavelength of a quanton and energy of a photon with a frequency f

$$\lambda = \frac{h}{p}, \qquad\qquad E = hf \tag{12}$$

Energy levels of the hydrogen atom (main quantum number n, Bohr radius a_0)

$$E_n = -\frac{K_e e^2}{2a_0 n^2} \tag{13}$$

Gravitational Force

$$F = \frac{GMm}{r^2} \tag{14}$$

Centrifugal force

$$F = \frac{mv^2}{r} \tag{15}$$

Gravitational potential energy of a sphere with radius R and mass M

$$U = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} \tag{16}$$

Coulomb forces between two charged particles with charges Z_1 and Z_2 and a distance r

$$F = \frac{Z_1 Z_2\ e^2}{r} \tag{17}$$

Kepler's third law (orbital period P, semi-major axis a)

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \tag{18}$$

Mass-Period relation for binaries of masses m_1 and m_2 in circular orbits with a distance $R = r_1 + r_2$

$$4\pi^2 R^3/G = (m_1 + m_2)P^2 \tag{19}$$

Period in a circular orbit (speed v)

$$P = 2\pi r/v \tag{20}$$

Parallax and distance (rad - radians; " - arcseconds)

$$p(\text{rad}) = \frac{1\text{AU}}{d} \qquad\qquad d(\text{pc}) = \frac{1}{p(\text{"})} \tag{21}$$

Relation between apparent magnitude difference of two stars and their brightness ratio

$$m_2 - m_1 = 2.5\log_{10}(\frac{b_1}{b_2}) \tag{22}$$

Distance modulus

$$(m - M) = 5\log_{10}(d/10\text{ pc}) \tag{23}$$

Ratio of total-to-selective extinction (A_V extinction in the V filter)

$$R = \frac{A_V}{A_B - A_V} \tag{24}$$

Continuity equation with mass density $\rho(r)$

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2\rho(r) \tag{25}$$

Pressure P in hydrostatic equilibrium

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho(r) \tag{26}$$

Radiative energy transport with an absorption coefficient per unit mass κ'

$$\frac{dT}{dr} = \frac{\kappa'(r)\rho(r)}{16\pi r^2\sigma T(r)^3}L(r) \tag{27}$$

Energy generation (ϵ is the energy generated per unit mass)

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)\epsilon(r) \tag{28}$$

Jeans length and Jeans mass of a cloud with density ρ

$$R_J = \sqrt{\frac{kT}{Gm\rho}} \qquad\qquad M_J = 4\left(\frac{kT}{GM}\right)^{3/2} \rho^{-1/2} \tag{29}$$

Free-fall timescale for collapse of a cloud with density ρ

$$t_{\mathrm{ff}} = \sqrt{\frac{1}{G\rho}} \tag{30}$$

Radius of a Strömgren sphere with proton density n_{p} (number of UV photons N_{UV})

$$R_s = \left(\frac{3N_{\mathrm{UV}}}{4\pi\alpha}\right)^{1/3} n_{\mathrm{p}}^{-2/3} \tag{31}$$

Properties of main sequence stars:

Spectral type	M_V	B-V	T(K)	M_{BOL}	$M/M_\odot$	$R/R_\odot$	$L/L_\odot$
O5	-6	-0.45	35000	-10.6	39.8	17.8	3.2×10^5
B0	-3.7	-0.31	21000	-6.7	17.0	7.6	1.3×10^4
B5	-0.9	-0.17	13500	-2.5	7.1	4.0	6.3×10^2
A0	+0.7	0.0	9700	0.0	3.6	2.6	7.9×10^1
A5	+2.0	+0.16	8100	+1.7	2.2	1.8	2.0×10^1
F0	+2.8	+0.30	7200	+2.7	1.8	1.4	6.3
F5	+3.8	+0.45	6500	+3.8	1.4	1.2	2.5
G0	+4.6	+0.57	6000	+4.6	1.1	1.05	1.3
G5	+5.2	+0.70	5400	+5.1	0.9	0.93	7.9×10^{-1}
K0	+6.0	+0.54	4700	+5.8	0.8	0.85	4.0×10^{-1}
K5	+7.4	+1.11	4000	+6.8	0.7	0.74	1.6×10^{-1}
M0	+8.9	+1.39	3300	+7.6	0.5	0.63	6.3×10^{-2}
M5	+12.0	+1.61	2600	+9.8	0.2	0.32	7.9×10^{-3}

Constants:

Name	cgs	SI
Gravitation constant G	6.67×10^{-8} cm^3 g^{-1} s^{-2}	6.67×10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}
Speed of light c	2.9979×10^{10} cm/s	2.9979×10^{8} m/s
Boltzmann constant k	1.38×10^{-16} erg/K	1.38×10^{-23} J/K
Gas constant R	8.3145×10^{7} erg mol^{-1}K^{-1}	8.3145 J mol^{-1}K^{-1}
Planck's constant h	6.62×10^{-27} erg s	6.62×10^{-34} J s
Stefan-Boltzmann constant σ	5.67×10^{-5} erg cm^{-2} s^{-1} K^{-4}	5.67×10^{-8} W m^{-2} K^{-4}
Atomic mass unit u	1.66×10^{-24} g	1.66×10^{-27} kg
Avogadro constant $\mathrm{N_A}$		6.0221×10^{23} mol^{-1}
Mass of electron m_e	9.11×10^{-28} g	9.11×10^{-31} kg
Mass of a proton m_p	1.6726×10^{-24} g	1.6726×10^{-27} kg
Mass of a neutron m_n	1.6749×10^{-24} g	1.6749×10^{-27} kg
Mass of a hydrogen atom m_H	1.6736×10^{-24} g	1.6736×10^{-27} kg
Mass of a Helium atom $m(^4\mathrm{He})$	6.6443×10^{-24} g	6.6443×10^{-27} kg
Bohr radius a_0	5.29×10^{-9} cm	5.29×10^{-11} m
Coulomb constant K_e		8.99×10^{9} N m^2 C^{-2}
Elementary charge e		1.6022×10^{-19} C
Astronomical unit AU	1.496×10^{13} cm	1.496×10^{11} m
Parsec pc	3.086×10^{18} cm	3.086×10^{16} m
Solar mass $\mathrm{M_\odot}$	1.989×10^{33} g	1.989×10^{30} kg
Solar radius $\mathrm{R_\odot}$	6.96×10^{10} cm	6.96×10^{8} m
Solar luminosity $\mathrm{L_\odot}$	3.85×10^{33} erg/s	3.85×10^{26} W
Earth mass $\mathrm{M_{Earth}}$	5.97×10^{27} g	5.97×10^{24} kg
Earth radius $\mathrm{R_{Earth}}$	6.378×10^{8} cm	6.378×10^{6} m

Units:

1 J = 1 N m = 10^7 erg = 10^7 cm^2 g s^{-2}

1 eV = 1.6022×10^{-19} J

1 W = 1 J/s = 10^7 erg/s

1 Pa = 1 N/m^2 = 10 dyn/cm^2